SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
ISTITUTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

A. CAVALLUCCI

CONDIZIONI DI HAMILTON PER LE SOLUZIONI OTTIME DELLE INCLUSIONI DIFFERENZIALI

12-19 MAGGIO 1983

1. INTRODUZIONE

Consideriamo l'inclusione differenziale

(1) $\dot{x}(t) \in E(t,x(t))$, $0 \leq t \leq 1$,

con

(2) $([0,1] \times R^n) \cap \Omega \ni (t,x) \to E(t;x) \neq \emptyset$ compatto in R^n

e $\Omega \subset R \times R^n$ aperto tale che, per ogni $t \in [0,1]$, esiste $x \in R^n$ per cui si ha $(t,x) \in \Omega$. Indichiamo con T_E l'insieme delle *traiettorie* $x:[0,1] \to R^n$ (assolutamente continue e verificanti (1) q.d.) e con $A_E(x_o)$ *l'insieme raggiungibile* all'istante $t = 1$, ossia

$$A_E(x_o) = \{x(1) | x \in T_E, \ x(0) = x_o\}$$

Ci proponiamo di esporre alcuni risultati di F.A. Clarke relativi alla ottimizzazione delle soluzioni della inclusione (1). Tali risultati sono espressi in termini della *funzione Hamiltoniana*

$$(([0,1] \times R^n) \cap \Omega) \times R^n \ni (t,x,p) \overset{H}{\to} \max\{\langle u,p\rangle u \in E(t,x)\}$$

Abbiamo indicato con $\langle u,p\rangle$ il prodotto scalare abituale in R^n. Tali risultati si confrontano col "principio di massimo di Pontryagin" (cfr. [1] e n. 5).

In tutto il seguito le ipotesi minime sulla m-funzione E, oltre alla (2), saranno le seguenti ($B = \{x \in R^n | |x| \leq 1\}$

(3) $E(\cdot,x)$ è misurabile

(4) $E(t,x) \subset E(t,y) + k(t)\ |x-y|\ B$, $0 \leq k \in L^1$

(5) $E(t,x) \subset b(t)\ B$, $0 \leq b \in L^1$.

Nel caso in cui

$$E(t,x) = f(t,x,U) = \{f(t,x,u) | u \in U\}$$

tali condizioni sono soddisfatte se

$$[0,1] \times \Omega \times U \ni (t,x,u) \to f(t,x,u) \in R^n$$

$$|f(t,x,u) - f(t,y,u)| \leq k(t)\ |x-y| , \quad 0 \leq k \in L^1$$

e f è t-misurabile e u-continua, $R^n \supset \Omega$ aperto, $R^m \supset U$ compatto. Per la verifica si veda [1].

Un risultato tipico fra quelli che ci proponiamo di esporre è il seguente

Teorema 1. Supponiamo che E verifichi le condizioni (2)-(5), che $R^n \supset C$ chiuso e che

$$g: R^n \to R^m$$

sia localmente lipschitziana. Se $z \in T_E$ verifica le condizioni

$$z(0) \in C,\ g(z(1)) \in \textit{frontiera di } g[A_E(C)] ,$$

allora esistono $p: [0,1] \to R^n$ assolutamente continua e $v \in R^m$ tali che

(6) $(-\dot{p}(t),\ \dot{z}(t)) \in \partial H(t,z(t),p(t))$ q.d.

(7) $p(0) \in N(C;z(0))$

(8) $p(1) \in \partial g^*(z(1))v\ , \qquad |v| = 1\ .$

Abbiamo indicato con $\partial H(\partial g)$ il gradiente generalizzato di H rispetto alle variabili (x,p) (la matrice jacobiana generalizzata di g) e con $N(C;x)$ il cono normale secondo Clarke [3], [2].

Ci proponiamo di indicare le tappe fondamentali della dimostrazione, seguendo [2], dopo avere richiamato definizione e alcune "regole di calcolo" del gradiente generalizzato e, successivamente, alcuni risultati dal calcolo delle variazioni e dalla teoria delle inclusioni differenziali sui quali si fonda la dimostrazione. Vedremo infine come si possano ottenere dal Teorema 1 condizioni necessarie per il problema

$$\min\{g(x(1)) + \int_0^1 L(t,x(t),\dot{x}(t))dt \,|\, x \in T_E, x(0) \in C_0\ ,$$
$$x(1) \in C_1\}$$

2. CALCOLO DIFFERENZIALE DI CLARKE

Si definisce *matrice jacobiana generalizzata* (*gradiente generalizzato* se $m = 1$) della funzione

$$R^n \supset \Omega \xrightarrow{g} R^m$$

localmente lipschitziana in $x \in \Omega$ aperto

$$\partial g(x) = \langle \{ \lim_{j \to \infty} Dg(x_j) | x_j \to x \} \rangle$$

dove $\langle A \rangle$ indica l'involucro convesso dell'insieme A e $Dg(x) = \| \partial g_i / \partial x_j \|$ indica la usuale matrice jacobiana di $g = (g_1, \ldots, g_m)$.

Si definisce *cono normale* in $x \in C$ *chiuso*

$$N(C;x) = \overline{co}(\{0\} \cup \{ \lim_{j \to \infty} \frac{x_j - \tilde{x}_j}{|x_j - \tilde{x}_j|} | C \not\ni x_j \to x ,$$

$$C \ni \tilde{x}_j = \text{punto di minima distanza di } x_j \text{ da } C\})$$

dove $\overline{co}(A)$ = cono convesso chiuso generato da A.

Per g a valori reali si definisce la *derivata generalizzata nella direzione* h

$$g^o(x;h) = \limsup_{\substack{x' \to x \\ s \to 0+}} \frac{g(x' + sh) - g(x')}{s}$$

Clarke ha introdotto in [3] gradiente generalizzato e cono normale. La matrice jacobiana generalizzata è stata deinita successivamente in [1], [2].

Ricordiamo le seguenti proprietà del gradiente generalizzato (g a valori reali):

i) $\partial g(x) = \{u \in R^n | \forall\, h \in R^n: \langle u,h \rangle \leq g^o(x;h)\}$;

ii) $h \to g^o(x;h)$ è lipschitziana e sub-lineare;

iii) $\partial g(x) \neq \emptyset$ convesso e compatto e la m-funzione $x \to \partial g(x)$ è u.s.c., ossia

$$u_j \in \partial g(x_j) \ , \ (x_j, u_j) \to (x,u) \Rightarrow u \in \partial g(x);$$

iv) $g^0(x;h) = \max\{\langle u,h\rangle \mid u \in \partial g(x)\}$ e la funzione $(x,h) \to g^0(x;h)$ è u.s.c.;

v) $(-g)^0 (x;h) = g^0(x;-h)$, $\partial(-g)(x) = -\partial g(x)$;

vi) x = punto di minimo o massimo locale per $g \Rightarrow 0 \in \partial g(x)$;

vii) se g è convessa, ∂g coincide col sub-differenziale usuale;

viii) $\partial g(x) = \{u\}$ se e solo se

$$\lim_{\substack{x' \to x \\ h \to 0}} \frac{f(x' + h) - f(x') - \langle u,h\rangle}{\| h \|} = 0$$

e ∂g è a un sol valore su Ω se e solo se $g \in C^1(\Omega)$, e in tal caso $\partial g(x) = \{\nabla g(x)\}$;

ix) (*valor medio*) se Ω contiene il segmento $[x,y]$, esiste z interno al segmento tale che

$$g(y) - g(x) \in \langle y-x, \partial g(z)\rangle \ ;$$

x) $$\partial\Big(\sum_{i=1}^{k} g_i\Big)(x) \subset \sum_{i=1}^{k} \partial g_i(x) \ ;$$

xi) $$\partial\big(\max_{1\le i\le k} g_i\big)(x) \subset \big\langle \bigcup_{i\in I(x)} \partial g_i(x)\big\rangle$$

dove $I(x)$ indica l'insieme degli indici $\underline{i}$ per i quali viene assunto il massimo;

xii) se $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$, l'affermazione

$$(u,v) \in \partial g(x,y) \Rightarrow v \in \partial_y g(x,y)$$

è vera se $g(x,\cdot)$ è convessa, oppure se esiste $\nabla_y g$ in Ω ed è continuo in (x,y).

Un esempio di funzione g per cui non è vera l'affermazione xii) è dato da

$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 = y \\ \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (0,0) \neq (x,y) \in R^2 \end{cases}$$

per la quale si verifica che

$$\partial g(0,0) = B = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1\} ,$$

$$\partial_y g(0,0) = \{0\} .$$

Posto per l'insieme $C \subset R^n$

$$\rho(x;C) = \inf\{|x-y| \,|\, y \in C\}$$

$$\delta(x;C) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in C \\ +\infty & \text{se } x \notin C \end{cases}$$

per il cono normale valgono le seguenti affermazioni

i) $N(C;x) = \overline{\bigcup_{t \geq 0} t\, \partial\rho(x;C)} = \partial\delta(x;C);$

ii) $N(C \times D;(x,y)) \subset N(C;x) \times N(D;y)$;

iii) se C = convesso, oppure C = varietà di classe C^1, allora $N(C;x)$ ha il significato usuale;

iv) se $C = \text{epi } g = \{(x,t) \in \Omega \times R \mid t \geq g(x)\}$ con g M-lipschitziana, allora

$$(u,v) \in N(\text{epi } g;(x,g(x)) \Rightarrow 0 \leq |u| \leq M(-v),$$

$$u \in \partial g(x) \Longleftrightarrow (u,-1) \in N(\text{epi } g;(x,g(x))).$$

Mediante quest'ultima formula Clarke [4] ha esteso la *definizione di gradiente generalizzato* alle funzioni g a valori reali *inferiormente semicontinue*, ossia con epi g = chiuso.

Le dimostrazioni delle affermazioni precedenti si possono trovare in [3], [5], dove si trovano anche ulteriori proprietà importanti del gradiente generalizzato.

3. RISULTATI PRELIMINARI

Clarke ha applicato il suo "calcolo differenziale generalizzato" al problema di Bolza del calcolo delle variazioni e ha ottenuto, fra l'altro, versioni "generalizzate" delle equazioni di Eulero-Lagrange, partendo da equazioni dello stesso tipo note per il caso convesso. Qui ricordiamo alcuni dei suoi risultati, che formalizziamo nel Teorema A, sui quali si basa la dimostrazione del Teorema 1.

Consideriamo le funzioni

$$l: R^n \times R^n \to]-\infty, +\infty]$$

$$L: [0,1] \times R^n \times R^n \to]-\infty, +\infty]$$

$$z: [0,1] \to R^n$$

sulle quali facciamo le ipotesi seguenti:

- l e $L(t,\cdot,\cdot)$ sono inferiormente semicontinue;
- la multifunzione

$$[0,1] \times R^n \ni (t,x) \to \operatorname{epi} L(t,x,\cdot) = \{(u,r) \in R^n \times R \mid r \geq L(t,x,u)\}$$

è t-misurabile;

- z risolve il problema, per qualche $\delta > 0$,

$$\min\{l(x(0),x(1)) + \int_0^1 L(t,x(t),\dot{x}(t))dt \mid x \text{ assol. continua}, \tag{9}$$

$$|x(t)-z(t)| \leq \delta \text{ per } 0 \leq t \leq 1\}$$

e rende finiti sia $l(z(0),z(1))$ che l'integrale corrispondente [si conviene che sia $-\infty + \infty = +\infty$];

- la multifunzione $(t,x) \to \operatorname{epi} L(t,x,\cdot)$ verifica la condizione di lipschitzianità

$$\operatorname{epi} L(t,x_1,\cdot) \subset \operatorname{epi} L(t,x_2,\cdot) + k(t)|x_1-x_2| \text{ per } |x_i-z(t)| \leq \delta$$

essendo $0 \leq k \in L^1$.

Diremo, con Clarke [4], [2], ..., che il problema (9) è "*calmo*" *in* z *per* t = 1 se, posto

$$\Phi_\delta(s) = \inf\{l(x(0),x(1)+s) + \int_0^1 L(t,x,\dot{x})dt \mid x \text{ assol. continua},$$

$$|x(t) - z(t)| \leq \delta \text{ per } 0 \leq t \leq 1\} ,$$

risulta

$$(10) \qquad \liminf_{s\to 0} \frac{\Phi_\delta(s) - \Phi_\delta(0)}{|s|} > -\infty .$$

Una condizione sufficiente per la (10) è che sia

$$(11) \qquad l(x_0,x_1) = l_0(x_0) + l_1(x_0,x_1)$$

con l_1 finita e lipschitziana in un intorno di $(z(0),z(1))$ (cfr. [4], Proposizione 1).

Indichiamo con $\hat{L}(t,x,\cdot)$ la *convessificazione* di $L(t,x,\cdot)$, ossia la massima minorante convessa di $L(t,x,\cdot)$.

Teorema A. Se valgono le ipotesi precedenti e se il problema (9) è calmo si ha

$$\hat{L}(t,z(t),\dot{z}(t)) = L(t,z(t),\dot{z}(t)) \quad \text{q.d.}$$

e z risolve il problema (9) con $\hat{L}$ al posto di L, eventualmente con δ più piccolo. Inoltre esiste $p: [0,1] \to R^n$ assolutamente continua tale che

$$(\dot{p}(t),p(t)) \in \partial L(t,z(t),\dot{z}(t)) \quad \text{q.d.}$$

$$(p(0),-p(1)) \in \partial l(z(0),z(1)).$$

Qui ∂L indica il gradiente generalizzato, rispetto a (x,u), per funzioni inferiormente semicontinue.

Questo è il contenuto dei Teoremi 1 e 2 di [4]. In [4] si trovano altre condizioni sufficienti per la condizione (10).

Un altro risultato essenziale per il seguito è il seguente "principio variazionale" di Ekeland [6].

Teorema B. Sia (X,d) uno spazio metrico completo sul quale è data la funzione

$$f: X \to]-\infty, +\infty]$$

inferiormente semicontinua. Se $\varepsilon > 0$ e x_0 sono tali che

$$f(x_0) - \varepsilon \leq f(x), \quad \forall\, x \in X,$$

allora, per ogni $\eta > 0$, esiste $x_1 \in X$ che verifica le condizioni

$$d(x_0,x_1) \leq \eta$$

$$f(x_1) < f(x) + \frac{\varepsilon}{\eta}\, d(x,x_1), \quad \forall\, x \neq x_1$$

$$f(x_1) \leq f(x_0)\ .$$

Per le inclusioni differenziali (1) vale la seguente variante di un noto teorema di Filippov [7].

Teorema C. Supponiamo che E verifichi le condizioni (2)-(5). Esiste una costante $K > 0$ tale che, per ogni $x: [0,1] \to R^n$ assolutamente continua verificante le condizioni

$$\{(t,y) \in [0,1] \times R^n \mid |y-x(t)| \le \varepsilon\} \subset \Omega$$

$$\int_0^1 \rho(\dot{x}(t);E(t,x(t)))dt < \frac{\varepsilon}{K}$$

per un $\varepsilon > 0$, esiste $\tilde{x} \in T_E$ tale che $\tilde{x}(0) = x(0)$ e inoltre

$$\max_{0\le t\le 1} |\tilde{x}(t)-x(t)| + \int_0^1 |\dot{\tilde{x}} - \dot{x}|dt \le K \int_0^1 \rho(\dot{x}(t);E(t,x(t)))dt$$

Per la dimostrazione, oltre a [7], si può vedere [8].

Per le inclusioni differenziali a valori convessi si ha il seguente

Teorema D. Sia $C \subset [0,1] \times R^n$ chiuso tale che $C \cap (\{t\} \times R^n) \neq \emptyset$ per $0 \le t \le 1$ e sia

$$C \ni (t,x) \to F(t,x) \neq \emptyset \text{ convesso chiuso } \subset R^n$$

una m-funzione t-misurabile e con il grafico di $F(t,\cdot)$ chiuso per ogni t. Supponiamo che le funzioni x_k, z_k; $[0,1] \to R^n$ e δ_k: $[0,1] \to R$ verifichino le condizioni

- x_k è assolutamente continua per $k = 1, 2, \ldots$;
- $\dot{x}_k(t) \in F(t,x_k(t) + z_k(t)) + \delta_k(t) B$ q.d.;
- $|x_k(t_o)| \le m < \infty$;
- $L^1 \ni \dot{x}_k$ è debolmente relativamente compatta;
- $z_k(t) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$ q.d.;
- $0 \le \delta_k(t) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$ q.d..

Allora esiste una sottosuccessione di $k \to x_k$ che converge uniformemente alla funzione x: $[0,1] \to R^n$ assolutamente continua tale che

$$\dot{x}(t) \in F(t,x(t)) \quad \text{q.d.}$$

e la sottosuccessione converge a $\dot{x}$ rispetto alla topologia debole indotta su L^1 da L^∞.

<u>Osservazione</u>. Affinché la successione $k \to \dot{x}_k$ sia debolmente relativamente compatta in L^1 è sufficiente che sia soddisfatta una delle condizioni seguenti

a) $$|\dot{x}_k(t)| \leq c(t) \quad \text{q.d.}, \qquad 0 \leq c \in L^1$$

b) $$\int_0^1 |\dot{x}_k(t) - y(t)|dt \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 , \qquad y \in L^1$$

Per la dimostrazione si veda [8], [9], [1].

Consideriamo la m-funzione

$$R^n \supset \Omega \ni x \to E(x) \neq \emptyset \text{ compatto convesso} \subset R^n$$

verificante le condizioni

$$E(x) \subset E(y) + k|x-y| , \qquad 0 \leq k = \text{costante}$$

$$N(E(x);u) = \{tv | t \geq 0\} ,$$

ossia il cono normale è costituito da una semiretta in ogni punto u della frontiera di E(x). Poniamo

$$\rho(x,u) = \rho(u;E(x)),$$

$$h(x,p) = \max\{\langle p,u\rangle | u \in E(x)\}.$$

Si ha il seguente

<u>Teorema E</u>. Sotto le condizioni precedenti si ha

$$h(x,p) = \max\{\langle p,u\rangle - M\,\rho(x,u) \mid u \in R^n\}, \quad \forall\, M \geq |p|$$

$$(q,p) \in \partial[M\,\rho(x,u)] \Rightarrow (-q,u) \in \partial h(x,p) + \rho(x,u)\,B.$$

<u>Osservazione</u>. La condizione sul cono normale è soddisfatta dall'insieme $E(x) + r\,B$ per ogni $r > 0$, se $E(x)$ è convesso chiuso $\neq \emptyset$.

Per la dimostrazione si veda [9] e [2].

Sia E dato da (2). Poniamo

$$\rho(t,x,y) = \rho(y;E(t,x)) \ .$$

E' noto che la condizione (3) è equivalente alla misurabilità di $\rho(\cdot,x,y)$ per ogni $y \in R^n$. Dalla (4) segue

$$|\rho(t,x,y) - \rho(t,x',y')| \leq k(t)|x-x'| + |y-y'|$$

e di qui si ottiene

$$\rho^o(t,x,y;\alpha,\beta) \leq k(t)|\alpha| + |\beta|$$

e ancora

$$(12) \qquad (u,v) \in \partial\rho(t,x,y) \Rightarrow \begin{cases} |u| \leq k(t) \\ |v| \leq 1\ . \end{cases}$$

Per la funzione Hamiltoniana si ha invece, sotto le ipotesi (2), (4), (5)

$$H(t,x,p) - H(t,x',p') \leq k(t)|p'||x-x'| + b(t)|p-p'|$$

e di qui segue

$$H^o(t,x,p;h,k) \leq k(t)|p||h| + b(t)|k|$$

e ancora

$$(13) \qquad (u,v) \in \partial H(t,x,p) \Rightarrow \begin{cases} |u| \leq k(t)\ |p| \\ |v| \leq b(t)\ . \end{cases}$$

4. DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1

Ora passiamo a indicare le tappe principali della dimostrazione del Teorema 1, seguendo Clarke [2].

Sia $\delta > 0$ tale che l'insieme

$$T(z,\delta) \overset{def}{=\!=} \{x\colon [0,1] \to R^n | x \text{ assol. continua},$$

$$|x(t) - z(t)| \leq \delta \text{ per } 0 \leq t \leq 1\}$$

sia contenuto in $\Omega \cap ([0,1] \times R^n)$ e sia

$$X_\delta = \{x \in T_E | x(o) \in C,\ x \in T(z,\delta)\}$$

con la distanza da

$$d(x,y) = |x(o) - y(o)| + \int_0^1 |\dot{x}-\dot{y}|dt$$

Si dimostra che (X_δ, d) è completo.

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e successivamente $\zeta \in R^m$ verificante le condizioni

$$|\zeta - g(z(1))| < \varepsilon$$

$$F(x) \overset{\text{def}}{=\!=} |\zeta - g(x(1))| > 0, \forall x \in X_\delta$$

Questo è possibile per il fatto che abbiamo supposto $g(z(1)) \in$ frontiera di $g(\mathscr{A}_E(C))$. Dallalipschitzianità di g segue la lipschitzianità di F su X_δ . F soddisfa la condizione

$$F(z) - \varepsilon < 0 \leq F(x), \forall x \in X_\delta$$

e questo ci permette di applicare il Teorema B, con $\eta = \sqrt{\varepsilon}$, per ottenere una funzione $z_1 \in X_\delta$ tale che

$$d(z,z_1) \leq \sqrt{\varepsilon}$$

$$F(z_1) \leq F(x) + \sqrt{\varepsilon}\, d(z_1,x), \ \forall x \in X_\delta$$

Di qui segue che z_1 risolve il problema

(i) $\min\{F(x) + \sqrt{\varepsilon}\,(|x(0)-z_1(0)| + \int_0^1 |\dot{x}-\dot{z}_1|\,)|\ x \in T_E\ ,\ x(0) \in C,$

$x \in T\ (z_1,\ \delta_1)\}$

per $\delta_1 > 0$ abbastanza piccolo (se ε è abbastanza piccolo). A questo problema si può applicare il Teorema A con

$$l(x,y) = l_0\ (x) + l_1(y),$$

$$l_0(x) = \begin{cases} \sqrt{\varepsilon}\,|x - z_1(0)| & \text{se } x \in C \\ +\infty & \text{se } x \notin C \end{cases}$$

$$l_1(y) = |\zeta - g\ (y)|$$

$$L(t,x,u) = \begin{cases} \sqrt{\varepsilon}\,|u-\dot z_1(t)| & \text{se } u\in E(t,x),\ |x-z_1(t)|\le \delta_1 \\ +\infty. & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e se ne deduce che z_1 risolve anche il problema rilassato

$$\text{(ii)}\ \min \{l_0(x(0)) + l_1(x(1)) + \int_0^1 L(t,x,\dot x)dt\,|\ x \text{ assolutamente continua},$$

$$|x(t) - z_1(t)| \le \delta_1\}$$

Ora si può verificare che si ha

$$\hat L\ (t,x,u) = +\infty \text{ se } u \notin < E\ (t,x) >$$

$$\hat L\ (t,x,u) \le 2\ k(t)|x-z_1(t)| + \sqrt{\varepsilon}\ |u-\dot z_1\ (t)| \text{ se } u\in < E\ (t,x) >$$

e di qui segue che z_1 risolve anche il problema

$$\text{(iii)}\ \min \{F(x) + \sqrt{\varepsilon}\ d\ (x,z_1) + 2\sqrt{\varepsilon}\int_0^1 k|x-z_1|dt|\ x \in T_{<E>}\ ,$$

$$x(0)\in C,\ |x(t) - z_1\ (t)| \le \delta_2\},\ 0 < \delta_2 \le \delta_1$$

Poniamo

$$\rho(t,x,u) = \rho(u;<E\ (t,x)>)$$

Allora la funzione $\rho(t,\cdot,\cdot)$ è lipschitziana e si ha

$$x\in T_{<E>} \iff \int_0^1 \rho(t,x(t),\ \dot x(t))\ dt = 0$$

Proviamo che esiste una costante $m > 0$ tale che z_1 risolve il problema

(iv) $\min\{F(x) + \sqrt{\varepsilon}\, d(x,z_1) + 2\sqrt{\varepsilon}\int_0^1 k|x-z_1|dt + m\int_0^1 \rho(t,x,\dot{x})dt|$

x assol. continua, $x(0)\in C$, $|x(t)-z_1(t)| \leq \delta_2\}$

In caso contrario esiste per ogni naturale m una funzione $x_m \in T(z_1, \delta_2)$ tale che

$$F(x_m) + \sqrt{\varepsilon}\, d(x_m,z_1) + 2\sqrt{\varepsilon}\int_0^1 k|x_m-z_1| + m\int_0^1 \rho\,(t,x_m,\dot{x}_m) < F(z_1)$$

Allora si ha, se M è la costante di Lipschitz per g,

$$m\int_0^1 \rho(t,x_m,\dot{x}_m) < F(z_1) - F(x_m) \leq M|z_1(1) - x_m(1)| \leq \delta_2 M$$

Pertanto si può applicare il Teorema C per ogni $m > MK$ e ottenere $\tilde{x}_m \in T_{\langle E\rangle}$ tale che $\tilde{x}_m(0) = x_m(0) \in C$ e

$$\max_{0\leq t\leq 1} |\tilde{x}_m(t) - x_m(t)| + \int_0^1 |\dot{\tilde{x}}_m - \dot{x}_m| \leq K\int_0^1 \rho(t,x_m,\dot{x}_m)$$

Siccome $\tilde{x}_m$ è una traiettoria per $\langle E\rangle$, si ha

$$F(z_1) \leq F\,(\tilde{x}_m) + \sqrt{\varepsilon}\, d(\tilde{x}_m,z_1) + 2\sqrt{\varepsilon}\int_0^1 K\,|\tilde{x}_m - z_1|$$

Da questa e dalle maggiorazioni precedenti segue

$$m\int_0^1 \rho(t,x_m,\dot{x}_m) < [F(\tilde{x}_m) - F(x_m)] + \sqrt{\varepsilon}\,[d(\tilde{x}_m,z_1) - d(x_m,z_1)] +$$

$$+ 2\sqrt{\varepsilon}\int_0^1 k\,[|\tilde{x}_m-z_1|-|x_m-z_1|]$$

Ora si ha

$$F(\tilde{x}_m) - F(x_m) \le M|\tilde{x}_m(1) - x_m(1)| \le MK\int_0^1 \rho(t,x_m,\dot{x}_m)$$

$$d(\tilde{x}_m,z_1) - d(x_m,z_1) \le d(\tilde{x}_m,x_m) = \int_0^1 |\dot{\tilde{x}}_m-\dot{x}_m| < K\int_0^1 \rho(t,x_m,\dot{x}_m)$$

$$\int_0^1 k\,[\,|\tilde{x}_m-z_1| - |x_m-z_1|\,] \le \int_0^1 k\,|\tilde{x}_m - x_m| \le$$

$$\le \max_{0\le t\le 1} |\tilde{x}_m(t) - x_m(t)| \int_0^1 k \le \int_0^1 k \,.\, K\int_0^1 \rho(t,x_m,\dot{x}_m)$$

e quindi si ottiene, con una costante $M_1 > 0$,

$$m\int_0^1 \rho(t,x_m,\dot{x}_m) < M_1\int_0^1 \rho(t,x_m,\dot{x}_m) \quad , \; m > MK$$

e questo è assurdo.

Regolarizziamo ancora la nostra multi-funzione.

Per questo poniamo, con $r > 0$,

$$E_r(t,x) = \{u \in R^n | \rho(u; \langle E(t,x)\rangle) \le r\}$$

$$\rho_r(t,x,u) = \rho(u; E_r(t,x))$$

Allora riesce

$$\rho(t,x,u) \le \rho_r(t,x,u) + r$$

e quindi

$$F(z_1) - mr \le F(x) + \sqrt{\varepsilon}\, d(x,z_1) + 2\sqrt{\varepsilon}\int_0^1 k|x-z_1|dt +$$

$$+ m\int_0^1 \rho_r\,(t,x,\dot{x})dt = F_1(x)$$

per ogni $x \in T(z_1,\delta_2)$ tale che $x(0) \in C$. Si ha $F_1(z_1) = F(z_1)$ e questo ci permette di applicare nuovamente il Teorema B allo spazio

$$X = \{x \in T(z_1,\delta_2) | x(0) \in C\}$$

con la stessa distanza considerata prima e F_1 al posto di F. Pertanto esiste $z_2 \in X$ tale che

$$d(z_2,z_1) \le m\sqrt{r}$$

$$F_1(z_2) \le F_1(x) + \sqrt{r}\, d(x,z_2), \quad \forall x \in X$$

Quindi, ancora una volta, z_2 risolve il problema.

(v) $\min\{F_1(x) + \sqrt{r}\, d(x,z_2) |$ x assolutamente continua, $x(0) \in C$,

$$|x(t) - z_2(t)| \le \delta_3\}$$

per $\delta_3 > 0$ abbastanza piccolo (se $r > 0$ è abbastanza piccolo).

Ora possiamo applicare nuovamente il Teorema A con

$$l(x,y) = l_0(x) + l_1(y),$$

$$l_0(x) = K_2(1+\sqrt{r}+\sqrt{\varepsilon})\rho(x(0);C) + \sqrt{\varepsilon}|x-z_1(0)| + \sqrt{r}|x-z_2(0)|,$$

$$l_1(y) = |\zeta - g(y)|,$$

$$L(t,x,y) = m\rho_r(t,x,u) + \sqrt{\varepsilon}|u-\dot z_1(t)| + \sqrt{r}|u-\dot z_2(t)| +$$

$$+ 2\sqrt{\varepsilon}\, k(t)|x-z_1(t)| \text{ per } |x-z_2(t)| \le \delta_3,$$

Allora esiste $p: [0,1] \to R^n$ assolutamente continua che verifica le condizioni

$$(\dot{p}(t), p(t) \in \partial\, L\, (t, z_2(t), \dot{z}_2(t)) \qquad \text{q.d.}$$

$$p(0) \in \partial l_o\, (z_2(0))$$

$$-p(1) \in \partial l_1(z_2(1))$$

Osserviamo che le funzioni l_i e L sono lipschitziane e quindi i loro gradienti sono del tipo indicato nel n. 2. Per l_o si ha (K_i = costante)

$$p(0) = \alpha_o + \alpha_1 + \alpha_2$$

con $\alpha_o \in K_2\, \partial\rho\, (z_2(0); C)$, $|\alpha_1| \leq \sqrt{\varepsilon}\, K_3$, $|\alpha_2| \leq \sqrt{r}\, K_3$

Per l_1 si ha, poiché $|g(z_2(1)) - \zeta| > 0$,

$$-p(1) \in \partial g^*\, (z_2(1))\ \frac{g(z_2(1))-\zeta}{|g(z_2(1))-\zeta|}$$

dove si è posto (A^* = trasposta di A)

$$\partial g^*(y)\ u = \{A^* u | A \in \partial g(y)\}$$

Per L si ha

$$(\dot{p}, p) = (\xi, \eta) + (\xi_1, \eta_1) + (\xi_2, \eta_2) + (\xi_3, \eta_3)$$

con $\xi_1 = 0$ e $|\eta_1| \leq \sqrt{\varepsilon}$, $\xi_2 = 0$ e $|\eta_2| \leq \sqrt{r}$ $\quad \eta_3 = 0$

e $|\xi_3| \leq 2\sqrt{\varepsilon}\, k(t)$. Inoltre si ha

$$(\xi,\eta) \in \partial\, m\rho_r\, (t; z_2(t), \dot{z}_2(t))$$

Consideriamo ora la hamiltoniana relativa a E_r

$$H_r(t,x,p) = \max\{\langle p,u\rangle \mid u \in E_r(t,x)\}$$

Per questa si possono provare le seguenti affermazioni (cfr. [2], [9], e Teorema E)

- $H_r(t,x,p) = \max\{\langle p,u\rangle - M\rho_r(t,x,u) \mid u \in R^n\}$, $\forall\, M \geq |p|$

- $(q,p) \in \partial m\rho_r(t,x,u) \Rightarrow (-q,u) \in \partial H_r(t,x,p) + \rho_r(t,x,u)\, B$

- $H_r(t,x,p) = H(t,x,p) + r|p|$

- $\partial\, H_r(t,x,p) \subset \partial H(t,x,p) + rB$

Ne segue che si ha per $(\xi,\eta) \in \partial m\rho_r(t,z_2(t), \dot{z}_2(t))$

$$(-\xi, \dot{z}_2(t)) \in \partial H(t,z_2(t),\eta) + [r + \rho_r(t,z_2(t), \dot{z}_2(t)]\, B$$

Si ha poi

$$(-\dot{p}, \dot{z}_2) \in \partial\, H(t; z_2, p-(\eta_1+\eta_2) + [r+2\sqrt{\varepsilon}\, k(t) + \rho_r(t,z_2,\dot{z}_2)]\, B$$

Sia p che z_2 dipendono da ε e r, così come r_1 e η_2. Proviamo che si possano prendere due successioni $\varepsilon_k \to 0$, $r_k \to 0$ che permettono di applicare il Teorema D. Cominciamo a supporre $0 < \varepsilon, r \leq 1$. Se M è la costante di Lipscitz di g, dalla condizione ottenuta sopra per p(1) segue

$$|p(1)| \le M$$

mentre dalla (12) e da $(\dot{p},p) \in \partial L(t;z_2,\dot{z}_2)$ segue

$$|\dot{p}(t)| \le (m+2)\, k\, (t) \qquad \text{q.d.}$$

Per quanto riguarda z_2, si ha invece

$$|z_2(t) - z(t)| \le |z_2(0) - z(0)| + \int_0^1 |\dot{z}_2 - \dot{z}| = d(z_2,z) \le m\sqrt{r} + \sqrt{\varepsilon}$$

e di qui segue

$$|z_2(1)| \le |z(1)| + m + 1,$$

$$\int_0^1 |\dot{z}_2 - \dot{z}| \le m\sqrt{r} + \sqrt{\varepsilon} \qquad \xrightarrow[r,\varepsilon \to 0+]{} 0$$

e possiamo prendere una successione (r_k, ε_k) tale che riesca anche

$$\dot{z}_2(t) \xrightarrow[k \to \infty]{} \dot{z}(t) \qquad \text{q.d.}$$

Si ha poi

$$\rho_r(t,z_2,\dot{z}_2) \le \rho(t,z_2,\dot{z}_2) \le \rho(t,z,\dot{z}_2) + k(t)|z_2 - z| \le$$

$$\le \rho\,(t,z,\dot{z}_2) + k(t)\,[m\sqrt{r} + \sqrt{\varepsilon}]$$

ed è

$$\rho(t,z,\dot z_2) \xrightarrow[k\to\infty]{} \rho(t,z,\dot z) = 0 \qquad \text{q.d.}$$

Si ha infine

$$|\eta_1 + \eta_2| \leq \sqrt{\varepsilon} + \sqrt{r} \xrightarrow[r,\ \varepsilon \to 0]{} 0$$

Pertanto possiamo applicare il Teorema D, tenendo conto dell'Osservazione che lo segue, alla multifunzione

$$F(t,x,p) = \begin{Vmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{Vmatrix} \partial H(t,x,p),$$

con I_n = matrice-unità in R^n, e ottenere una funzione q assolutamente continua (limite di p) tale che

$$(-\dot q,z) \in \partial H\ (t,z,q)$$

$$-q(1) \in \partial g^*(z(1))\, v \quad , \quad |v| = 1$$

$$q(0) \in K_2\, \partial\rho\ (z(0);\ C)$$

e questo conclude la dimostrazione.

<u>Osservazione</u>. La funzione $H(t,x,\cdot)$ è convessa e quindi da $(-\dot p,\ \dot z) \in \partial H(t,z,p)$ segue $\dot z \in \partial_p\ H(t,z,p)$ e questo coincide col sub-differenziale noto dall'analisi convessa ed ha come conseguenza

$$\dot z(t) \in \langle\ E(t,z(t))\ \rangle,\quad p(t) \in N(\langle E(t,z(t)\rangle;\ \dot z(t))$$

Pertanto deve essere $\dot z(t) \in$ frontiera di $\langle E(t,z(t))\rangle$ ogni volta che $p(t) \neq 0$.

Dalla condizione $(-\dot{p},\dot{z}) \in \partial H(t,z,p)$ segue (cfr (13))

$$|\dot{p}(t)| \leq k(t)|p(t)|$$

e di qui segue $p(t) \equiv 0$ se $p(t_0) = 0$ per qualche $t_0 \in [0,1]$.

5. ALTRI RISULTATI

Consideriamo ora il problema

(14) $$\min\{g(x(1)) \mid x \in T_E,\ x(0) \in C_0,\ x(1) \in C_1\}$$

con C_0 e C_1 chiusi in R^n. Per questo si ha il

Teorema 2. Se g è localmente lipschitziana e z è una "soluzione locale" del problema considerato, ossia rispetto agli $x \in T_E$ verificanti la condizione $|x(t) - z(t)| \leq \delta$ per $0 \leq t \leq 1$, allora esistono $\lambda \in \{0,1\}$ e $p: [0,1] \to R^n$ assolutamente continua tali che

$$(-\dot{p}(t),\ \dot{z}(t)) \in \partial H(t,z(t),\ p(t)) \quad \text{q.d.}$$

$$p(0) \in N\ (C_0;\ z(0))$$

$$-p(1) \in \lambda\ \partial\ g(z(1)) + N\ (C_1;z(1))$$

$$\lambda + |p(t)| > 0 \quad \text{per ogni } t$$

Osservazione. Il caso $\lambda = 1$ si verifica certamente se $z(1)$ è *punto interno* a C_1, poiché in tal caso riesce $N(C_1;z(1) = \{0\}$. Si dimostra (cfr. [10]) che si può prendere $\lambda = 1$ ogni volta che il problema è "calmo", poiché z risolve il problema ottenuto sostituendo, in quello dato sopra, C_1 con R^n e $g(z(1))$ con $g(z(1) + m\,\rho\,(z(1); C_1)$, con $m > 0$ opportuno.

Per dimostrare il Teorema 2 poniamo

$$\bar{x} = (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in R^n x R^n x R^n x R^n \text{ x } R$$

$$C = \{\bar{x}|x_1 \in C_o, x_2 \in R^n, x_3 \in C_1, x_5 \geq g(x_4)\} = C_o x R^n x C_1 x \text{ epig}$$

$$\bar{E}(t,\bar{x}) = \{(u,u,0,0,0)|u \in E(x_1)\}$$

$$\bar{z}(t) = (z(t),\ z(t),\ z(1),\ z(1),\ g\ (z(1)))$$

$$\bar{g}(\bar{x}) = (x_5, x_3-x_1,\ x_4-x_2,\ x_2-x_1)$$

Si ha

$$\bar{g}(\bar{z}(1)) = (g(z(1)),\ 0,\ 0,\ 0)$$

Verifichiamo che, se $\bar{x} \in T_{\bar{E}}$ (C) è tale che

$$\bar{g}(\bar{x}(1)) = (x_5(1),\ 0,0,0),$$

allora deve essere $x_5(1) \geq g(z(1))$. Di qui segue che $\bar{g}(\bar{z}(1)) \in$ frontiera di $\bar{g}(\mathscr{A}_{\bar{E}}$ (C)).

Si ha per $\bar{x}$ come sopra

$$x_1(1) = x_2(1) = x_3(1) = x_4(1)$$

$$\dot{x}_1 \in E(t,x_1),\ \dot{x}_2 = \dot{x}_1,\ \dot{x}_3 = 0 = \dot{x}_4 = \dot{x}_5$$

$$x_1(0) \in C_o,\ x_3(0) \in C_1,\ x_5(0) \geq g\ (x_4(0))$$

e quindi

$$x_1 \in \mathcal{T}_E\ (C_o),\ x_1(1) = x_3(1) = x_3(0) \in C_1$$

$$g(x_1(1)) \geq g(z(1))$$

$$x_5(1) = x_5(0) \geq g(x_4(0)) = g(x_4(1)) = g(x_1(1)) \geq \breve{g}(z(1))$$

Ora applichiamo il Teorema 1 e otteniamo $\bar{p}$: $[0,1] \to (R^n)^4 \times R$ assolutamente continua e $v \in R\mathrm{x}(R^n)^3$ tali che

$$(-\dot{\bar{p}},\dot{\bar{z}}) \in \partial\ \bar{H}\ (t,\bar{z},\bar{p}) \qquad \text{q.d.}$$

$$\bar{p}(0) \in N\ (C;\ \bar{z}(0))$$

$$\bar{p}(1) \in \partial\bar{g}^*(\bar{z}(1))v \quad ,\ |v| = 1$$

con

$$\bar{H}(t,\bar{x},\bar{p}) = H(t,x_1,p_1+p_2)$$

Ne segue

$$0 = \dot{p}_2 = \dot{p}_3 = \dot{p}_4 = \dot{p}_5$$

$$(-\dot{p}_1,\ \dot{z}_1) \in \partial H(t,z_1,p_1+p_2)$$

Si ha poi

$$\bar{p}(0) = (p_1(0),\ p_2(0),\ p_3(0), p_4(0), p_5(0)) \in$$

$$\in N(C_o; z(0)) \times \{0\} \times N(C_1; z(1)) \times N_{epig}\ (z(1),\ g(z(1)))$$

e quindi

$$0 = p_2(0) = p_2(t) \quad \text{per } 0 \le t \le 1$$

$$\begin{cases} (-\dot{p}_1, \dot{z}_1) \in \partial\ H(t, z_1, p_1) \\ p_1(0) \in N\ (C_o; z(0)) \end{cases}$$

Occupiamoci ora di $\bar{p}(1)$. Si ha, se $\bar{g} = (g_1, \dots, g_5)$,

$$\| \partial g_i / \partial x_j \| = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| .$$

e quindi, se $v = (v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4) \in R \times (R^n)^3$,

$$\bar{p}(1) = (p_1(1),\ p_2(1),\ p_3(1),\ p_4(1),\ p_5(1)) =$$

$$= (-v_2 - v_4,\ v_3 + v_4,\ v_2,\ v_3,\ v_1)$$

Ne segue

$$- p_1(1) = v_2 + v_4$$

$$v_4 - v_3 = p_2(1) = p_2(0) = 0$$

$$v_2 = p_3(1) = p_3(0) \in N\ (C_1;\ z(1)$$

$$v_3 = p_4(1) = p_4(0)$$

$$v_1 = p_5(1) = p_5(0)$$

$$(v_3,v_1) = (p_4(0),\ p_5(0)) \in N_{epig}\ (z(1),\ g(z(1)))$$

Da quest'ultima condizione segue

$$v_1 \leq 0, \quad |v_3| \leq M\ |v_1|$$

se M è la costante di Lipschitz per g.

Se $v_1 = 0$, allora $v_3 = 0 = v_4$ e quindi

$$-p_1(1) = v_2 \in N\ (C_1;z(1)), \quad v_2 \neq 0$$

poiché $1 = |v| = |v_2|$. Dunque sono soddisfatte tutte le condizioni richieste con $p = p_1$ e $\lambda = 0$.

Se $v_1 < 0$, la funzione $\frac{1}{|v_1|}\ \bar{p}$ soddisfa tutte le condizioni precedenti valide per $\bar{p}$ e quindi si può supporre $v_1 = -1$. Allora si ha

$$(v_3,\ -1) \in N_{epig}\ (z(1),\ g(z(1)))$$

e quindi

$$v_3 \in \partial g\ (z(1))$$

Ne segue

$$-p_1(1) = v_2 + v_3 \in \partial g(z(1)) + N\,(C_1;\, z(1))$$

e quindi che sono soddisfatte le condizioni volute da $p = \frac{1}{|v_1|}\, p_1$ e $\lambda = 1$.

Osservazione. Per il problema (14) *esiste* una soluzione z se si aggiungono le ipotesi seguenti:
- C_0 è compatto in R^n,
- $E\,(t,x)$ è convesso,
- esiste qualche $x \in T_E$ per cui $x(0) \in C_0$, $x(1) \in C_1$,

a quelle del Teorema 2. Questo segue dal Corollario 2 di [9].

Consideriamo il problema

$$\min\{g(x(1)) + \int_0^1 L(t,x,\dot{x})dt \,|\, x \in T_E,\ x(0) \in C_0,\ x(1) \in C_1\} \tag{15}$$

dove C_0 e C_1 sono chiusi, E continua a soddisfare le condizioni (2)-(5) e

$$L : (([0,1]\ x R^n) \cap \Omega)\ x\ R^n \longrightarrow R$$

è t-misurabile e verifica la condizione

$$|L(t,x,u) - L(t,x',u')| \leq k(t)\ |(x,u) - (x'-u')|$$

per $u \in E\,(t,x)$, $u' \in E\,(t,x')$. La relativa *Hamiltoniana* è definita da

$$H(t,x,p) = \max\,\{\langle p,v\rangle - L(t,x,v)|\ v \in E\,(t,x)\}$$

Teorema 3. Se sono soddisfatte le condizioni precedenti e se il problema (15) è "calmo", per ogni sua soluzione locale z, esiste

$p : [0,1] \to R^n$ assolutamente continua tale che

$$(-\dot{p}(t), \dot{z}(t) \in \partial H(t,z(t), p(t)) \quad \text{q.d.}$$

$$p(0) \in N\ (C_o;z(0))$$

$$-p(1) \in \partial\ g\ (z(1)) + N(C_1;z(1))$$

Indichiamo con $\bar{x} = (x_o,x)$ i punti di $R \times R^n$ e poniamo

$$\bar{E}(t,\bar{x}) = \{(L(t,x,u),\ u)|u \in E\ (t,x)\}$$

$$\bar{x}(t) = (\int_o^t L(s,x,\dot{x})\ ds,\ x(t))$$

$$\bar{C}_o = \{0\} \times C_o$$

$$\bar{C}_1 = R \times C_1$$

$$\bar{g}\ (\bar{x}) = x_o + g(x)$$

Allora $\bar{z}$ è soluzione locale del problema

$$\min\{\bar{g}(\bar{x}(1))|\bar{x} \in T_{\bar{E}}\ ,\ \bar{x}(i) \in \bar{C}_i \quad \text{per } i = 0,1\}$$

che è "calmo" e soddisfa tutte le ipotesi del Teorema 2. Si ha poi

$$\bar{H}(t,\bar{x},\bar{p}) = \max\{p_o L(t,x,u) + \langle p,u\rangle|\ u \in E(t,x)\}$$

Per il Teorema 2, esiste $\bar{p}$: $[0,1] \to R \times R^n$ assolutamente continua tale che $(\lambda = 1)$

$$(-\dot{p}_o, -\dot{p}, L(t,z,\dot{z}), \dot{z}) \in \partial \bar{H} (t,\bar{z},\bar{p}) \qquad \text{q.d.}$$

$$(p_o(0), p(0)) = \bar{p}(0) \in N (\bar{C}_o; \bar{z}(0))$$

$$(-p_o(1), -p(1) = -\bar{p}(1) \in \partial \bar{g}(\bar{z}(1)) + N (\bar{C}_1; \bar{z}(1))$$

Ne segue

$$p(0) \in N (C_o; z(0))$$

$$-p(1) \in \partial g (z(1)) + N (C_1; z(1))$$

$$-p_o(1) = 1$$

$$-\dot{p}_o = 0 \Rightarrow p_o(t) = -1 \quad \text{per } 0 \leq t \leq 1$$

$$(-\dot{p}, L(t,z,\dot{z}), \dot{z}) \in \partial \bar{H}(t,z,-1,p) \qquad \text{q.d.}$$

A causa dell'omogeneità in $\bar{p}$, dall'ultima formula si ottiene (cfr. [9], Theor 5.1)

$$(-\dot{p}, \dot{z}) \in \partial ((z,p) \to \bar{H}(t,z,-1,p)) = \partial H (t,z,p)$$

come si voleva.

Consideriamo ora il "caso autonomo", ossia il caso di E e L indipendenti da t. Se H è di classe C^1, si ha $H(z(t), p(t)$ = costante come conseguenza della condizione

$$(-\dot{p}, \dot{z}) \in \partial H(z,p),$$

In generale si ha il seguente

Teorema 4. Supponiamo che siano soddisfatte le condizioni del Teorema 2 con E indipendente da t. Allora esistono $\lambda \quad \{0,1\}$ e $p: [0,1] \to R^n$ assolutamente continua tali che

$$(-\dot{p}(t), \dot{z}(t)) \in \partial H(z(t), p(t)) \quad \text{q.d.}$$

$$H(z(t), p(t)) = \langle \dot{z}(t), p(t) \rangle = \textit{costante}$$

$$p(0) \in N(C_0; z(0))$$

$$-p(1) \in \lambda g(z(1)) + N(C_1; z(1))$$

$$\lambda + |p(t)| > 0 \quad \text{per } 0 \le t \le 1$$

Poniamo $\bar{x} = (x_0, x) \in R \times R^n$ e fissiamo $\varepsilon \in]0,1[$. Clarke [10] ha ottenuto il Teorema 4 dal Teorema 2 mediante il seguente

Lemma. Se z è soluzione locale del problema (14), con E indipendente da t, Allora $\bar{z} = (0,z)$ è soluzione locale del problema

$$\min\{g(x(1)) \mid |\dot{x}_0(t)| \le \varepsilon,\ \dot{x}(t) \in (1+\dot{x}_0(t))\, E(x(t)),\ x_0(0) = 0,$$
$$x(0) \in C_0,\ x(1) \in C_1,\ x_0(1) = 0\}$$

Per provare il Lemma poniamo

$$f(t) = \int_0^t [1+\dot{x}_0(s)]\, ds$$

Allora si ha

$$0 < 1-\varepsilon \le \frac{f(t'')-f(t')}{t''-t'} \le 1+\varepsilon \quad \text{per } 0 \le t' < t'' \le 1$$

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1$$

e quindi $f: [0,1] \xrightarrow[1-1]{su} [0,1]$ è strettamente crescente e lipschitziana. Dunque si può eseguire il cambiamento di variabile $t = f^{-1}(s)$ nell'inclusione

$$\dot{x}(t) \in [1+\dot{x}_0(t)]\, E(x(t))$$

e si ottiene, se $y(s) = x(f^{-1}(s))$,

$$\dot{y}(s) \in E(y(s)), \; y(0) = x(0), \; y(1) = x(1)$$

e quindi $g(x(1)) = g(y(1)) \ge g(z(1))$.

Ora applichiamo il Teorema 2 al problema considerato nel Lemma, la cui Hamiltoniana è

$$\bar{H}(x_0,x,p_0,p) = H(x,p) + \varepsilon\, |p_0 + H(x,p)|,$$

se H è l'Hamiltoniana del problema (14). Otteniamo così $\lambda \in \{0,1\}$ e $\bar{p}: [0,1] \to R \times R^n$ assolutamente continua tali che

$$(-\dot{p}_0, -\dot{p}, 0, \dot{z}) \in \partial \bar{H}(0,z,p_0,p)$$

$$(p_0(0), p(0)) \in N(\bar{C}_0; \bar{z}(0))$$

$$(-p_0(1), -p(1)) \in \lambda\, \partial\, \bar{g}(\bar{z}(1)) + N(\bar{C}_1;\bar{z}(1))$$

$$|p_o(t)| + |p(t)| + \lambda > 0 \quad \text{per } 0 \leq t \leq 1$$

essendo

$$\bar{C}_o = \{0\} \times C_o, \quad \bar{C}_1 = \{0\} \times C_1$$

$$\bar{g}(z_o,z) = g(z)$$

Ne segue

$$\dot{p}_o = 0$$

$$(-\dot{p},\ 0,\ \dot{z}) \in \partial\, [H(z,p) + \varepsilon |p_o + H(z,p)|]$$

$$p(0) \in N\ (C_o;\ z(0))$$

$$-p(1) \in \lambda\ \partial\ g(z(1) + N\ (C_1;\ z(1))$$

Dunque si ha

$$p_o(t) = \text{costante}$$

$$(-\dot{p},\dot{z}) \in \partial\ H(z,p) + \varepsilon\ K\ B$$

con K costante indipendente da ε e B = sfera unità in R^{2n}.
Si ha anche dalla convessità rispetto a (p_o,p)

$$(0,\dot{z}) \in \partial_{p_o,p}\ [H(z,p) + \varepsilon |p_o+H(z,p)|]$$

e quindi

$$\langle (0,\dot z), (p_0,p) \rangle = H(z,p) + \varepsilon|p_0+H(z,p)| \geq H(z,p)$$

D'altra parte si ha anche, poiché $\dot z \in E(z)$,

$$\langle \dot z,p\rangle \leq H(z,p)$$

e quindi si ottiene

$$H(z,p) = \langle \dot z,p\rangle = H(z,p) + \varepsilon|p_0 + H(z,p)|$$

e di qui segue

$$H(z,p) = -p_0 = \text{costante}$$

Si ha poi

$$0 < |p_0| + |p(t)| + \lambda \leq |p_0| + \max_{0\leq t\leq 1} |p(t)| + \lambda = m$$

e quindi, sostituendo $\bar p(t)$ con $\frac{1}{m}\,\bar p(t)$, possiamo supporre che siano verificate le condizioni

$$p_0 = \text{costante} = -H(z,p) = -\langle \dot z,p\rangle, \quad |p_0| \leq 1$$

$$|p(t)| \leq 1$$

$$(-\dot p,\dot z) \in \partial\, H(z,p) + \varepsilon\, K\, B$$

$$|\dot p(t)| \leq \text{costante}$$

$$p(0) \in N\,(C_0;z(0))$$

$$- p(1) \in u\, \partial\, g(z(1)) + N\,(C_1;z(1)),\ 0 \le u \le 1$$

$$|p_o| + |p(t)| + u = 1$$

Ora possiamo prendere una successione $0 < \varepsilon_k \to 0$ e applicare il Teorema D (a (p_k,z)).Questo permette di "passare al limite per $\varepsilon \to 0$" nelle relazioni precedenti e "porre $\varepsilon = 0$" nelle medesime. Dall'ultima e dalla prima segue

$$|p(t)| + u > 0 \quad \text{per } 0 \le t \le 1$$

Se $u > 0$, si può sostituire p con $\frac{1}{u}$ p e u con 1.

Abbiamo anche la seguente "versione autonoma" del Teorema 3

Teorema 5. Supponiamo che siano soddisfatte le condizioni del Teorema 3 con E e L indipendenti da t. Allora esiste $p\colon [0,1] \to R^n$ assolutamente continua tale che

$$(-\dot{p},\dot{z}) \in \partial\, H(z,p) \qquad \text{p.d.}$$

$$p(0) \in N\,(C_o;z(0))$$

$$-p(1) \in \partial\, g(z(1)) + N(C_1;z(1))$$

$$\langle p,\dot{z}\rangle - L(z,p) = H(z,p) = \textit{costante}$$

Per la dimostrazione si procede come per il Teorema 3, applicando il Teorema 4 invece del Teorema 2 e osservando che l'ipotesi di "calma" del problema permette di avere $\lambda = 1$, poiché si può supporre che sia $C_1 = R^n$, con un'altra g.

Gli ultimi due teoremi sono contenuti in [10] , dove viene trattato anche il caso di E e L che sono lipschitziane rispetto a (t,x).

Con tecniche analoghe, Clarke [1] ha esteso il "principio di massimo" di Pontryagin, con estremi fissi e senza vincoli di stato. Aubin e Clarke [11] e Vinter e Pappas [12] hanno trattato anche certi tipi di vincoli di stato.

Terminiamo con alcuni esempi.

Esempio 1. Consideriamo il problema (cfr. [13])

$$\min\{bx(1) + \int_0^1 |x(t)|dt \mid \alpha(x(t)) \leq \dot{x}(t) \leq \beta(x(t)),\ x(0) = c_0\}$$

con $\alpha,\beta: R \to R$ di classe C^1 e $\alpha \leq \beta$

Se poniamo

$$y(t) = \int_0^t |x(s)|ds$$

otteniamo il problema equivalente

$$\min\{b\, x(1) + y(1) \mid (\dot{x},\dot{y}) \in E(x,y),\ x(0) = c_0\ y(0) = 0\}$$

con

$$E(x,y) = \{(u,|x|) \mid \alpha(x) \leq u \leq \beta(x)\} = [\alpha(x), \beta(x)] \times \{|x|\}$$

La sua funzione Hamiltoniana è data da

$$H(x,y,p,q) = \max\{pu+q|x| \mid \alpha(x) \leq u \leq \beta(x)\} =$$

$$= q\ |x| + \max\{p\,\alpha(x),\ p\,\beta(x)\} =$$

$$= \begin{cases} q|x| + p\,\beta(x) & \text{se } p \geq 0 \\ q|x| + p\,\alpha(x) & \text{se } p \leq 0 \end{cases}$$

Per il gradiente generalizzato di H si ha

$$\partial H(x,y,p,q) = \begin{cases} (q\frac{x}{|x|} + p\,\beta'(x),\ 0,\ \beta(x),\ |x|) & \text{se } x \neq 0,\ p>0 \\ (q\frac{x}{|x|} + p\,\alpha'(x),\ 0,\ \alpha(x),\ |x|) & \text{se } x \neq 0,\ p<0 \end{cases}$$

e si ha anche

$$\partial_{x,p} H(x,y,0,q) = \{(q\frac{x}{|x|},\ v) | \alpha(x) \leq v \leq \beta(x)\} = \quad \text{se } x \neq 0$$

$$= \{q\frac{x}{|x|}\} \times [\alpha(x),\ \beta(x)]\ ,$$

$$\partial_{x,p} H(0,y,p,q) = \begin{cases} \{(qu+p\beta'(0),\beta(0)) | |u| \leq 1\} & \text{se } p > 0 \\ \{(qu+p\alpha'(0),\alpha(0)) | |u| \leq 1\} & \text{se } p < 0 \end{cases}$$

$$\partial_{x,p} H(0,y,0,q) = [-|q|,\ |q|] \times [\alpha(0),\ \beta(0)]$$

Ora possiamo applicare il Teorema 4 e ottenere due funzioni p e q assolutamente continue e un numero $\lambda \in \{0,1\}$ tali che, se il minimo è assunto in x,y

$$(p(0),\ q(0)) \in R \times R$$

$$-\ (p(1),\ q(1)) \in \lambda\{(b,1)\} + \{(0,0)\}$$

$$|p(t)| + |q(t)| + \lambda > 0 \quad \text{per ogni } t$$

$$(-\dot{p}, -\dot{q}; \dot{x}, \dot{y}) \in \partial H (x,y,p,q)$$

$$p\dot{x} + q\dot{y} = H (x,y,p,q,) = \text{costante}$$

In primo luogo si ha $\lambda \neq 0$ e quindi $\lambda = 1$,

$$p(1) = -b \quad , \; q(1) = -1$$

Si ha poi

$$(-\dot{q}, \dot{y}) = (0,|x|)$$

$$(-\dot{p}, \dot{x}) \in \partial_{x,p} H (x,y,p,q)$$

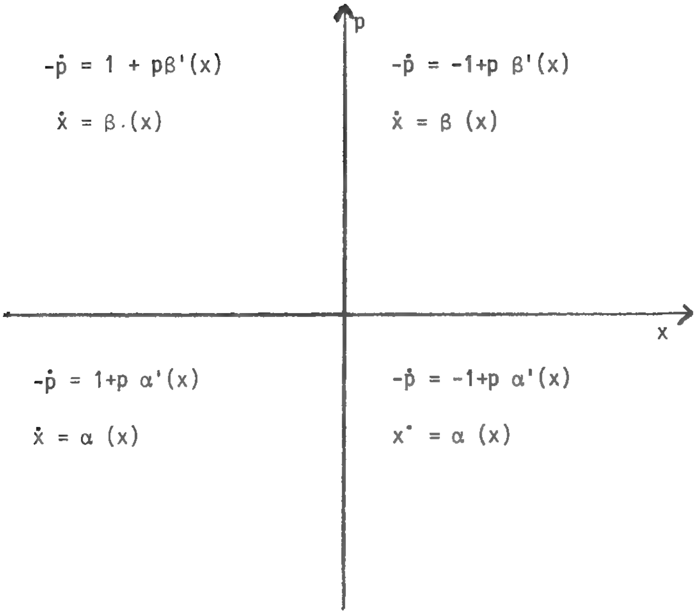
e quindi

$$q(t) = -1 \quad \text{per} \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$y(t) = \int_0^t |x(s)| \, ds \, , 0 \leq t \leq 1$$

e inoltre

$$(-\dot{p},\dot{x}) = \begin{cases} (- \frac{x}{|x|} + p\, \beta'(x), \beta (x)) \text{ se } p > 0,\; x \neq 0 \\ (- \frac{x}{|x|} + p\, \alpha'(x), \alpha (x)) \text{ se } p < 0,\; x \neq 0 \end{cases}$$



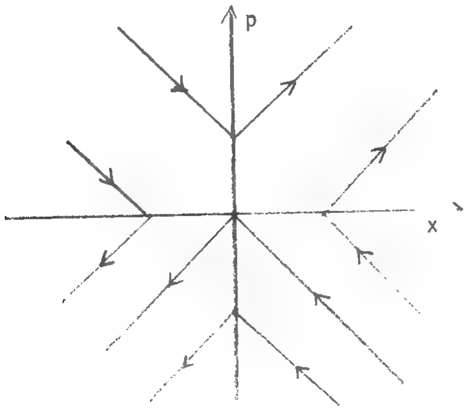
$$-|x| + \max\{p\,\alpha(x),\ p\,\beta(x)\} = C$$

con C = costante

Nel caso in cui sia

$$\alpha(x) \equiv -1 \quad , \ \beta(x) \equiv 1$$

le traiettorie sono rappresentate dalla figura



Osserviamo che,

$$\text{se } x(t_o) = 0 = p(t_o),$$

allora si ha

$$|\dot{p}(t_o)| \leqq 1, \ |\dot{x}(t_o)| \leqq 1$$

e la coppia

$$(x(t), p(t) \equiv (0,0)$$

fornisce una soluzione delle equazioni di Hamilton. Se invece $x(t_o) > 0 =$ $= p(t_o)$, allora si ha

$$\dot{p}(t_o) = 1, \quad |\dot{x}(t_o)| \leqq 1$$

Esempio 2. Il problema in R^3

$$\min\{x_1(1) | \ \dot{x} \in E\ (x),\ x(0) = 0,\ x_3(1) = 0\}$$

con

$$E(x) = \{x_2^2 - |u|,\ u,\ x_2^2)|\ |u| \leqq 1\}$$

non è "calmo" per t = 1. Si ha infatti

$$\dot{x} \in E(x) \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^2 - |u| \\ \dot{x}_2 = u \\ \dot{x}_3 = x_2^2 \end{cases}$$

$$0 = x_3(1) - x_3(0) = \int_0^1 x_2^2 \Rightarrow x_2 \equiv 0 \equiv u \equiv \dot{x}_1$$

e quindi $x_1(1) = 0$ = minimo. Si ha poi

$$\langle E(x) \rangle \ni \frac{1}{2} (x_2^2 - 1, -1, x_2^2) + \frac{1}{2} (x_2^2 - 1, 1, x_2^2) =$$

$$= (x_2^2 - 1, 0, x_2^2)$$

e quindi una soluzione per $\dot{x} \in \langle E(x) \rangle$ è data da

$$\dot{x}_1 = x_2^2 - 1$$

$$\dot{x}_2 = 0$$

$$\dot{x}_3 = x_2^2$$

Con le condizioni $x(0) = 0$, $x_3(1) = 0$ si ottiene

$$x_2(t) = 0 = x_3(t) \quad \text{per } 0 \leq t \leq 1$$

$$x_1(t) = -t \qquad \text{per } 0 \leq t \leq 1$$

e quindi $x_1(1) = -1$. Questo esclude che il "problema rilassato" abbia ancora minimo = 0 e quindi, per il Teorema A, il problema non può essere calmo.

BIBLIOGRAFIA

[1] F.H. CLARKE: The maximum principle under minimal hypoteses. SIAM J. Control and Optim. 14, 6(1976), 1078-91.

[2] F.H. CLARKE: Necessary conditions for a general control problem. Calculus of Variations and Control Theory, D.L. Russel edit., Math. Res. Center University of Wiscosin, Madison, Academic Press, New York, 1976.

[3] F.H. CLARKE: Generalized gradients and applications. Trans. AMS 205(1975), 247-62.

[4] F.H. CLARKE: The generalized probel of Bolza. SIAM J. Control. Optim. 14, 4(1976), 682-99.

[5] F.H. CLARKE: Generalized gradients of Lipschitz functionals. Advances in Math. 40(1981), 52-67.

[6] I. EKELAND: On the variational principle. J. Math. Anal. Appl. 47(1974), 324-53.

[7] A.F. FILIPPOV: Classical solutions of differential equations with multivalued righthand side. SIAM J. Control 5(1967), 609-21.

[8] J.P. AUBIN-A.CELLINA: Differential inclusions (in corso di stampa).

[9] F.H. CLARKE: Extremal arcs and extended Hamiltonion systems. Trans. AMS 231, 2(1977), 349-67.

[10] F.H. CLARKE: The Erdmann condition and Hamiltonian inclusions in optimal control and the calculus of variations. Canadian J. Math. 32, 2(1980), 494-509.

[11] J.P. AUBIN-F.H. CLARKE: Shadow prices and duality for a class of optimal control problems. SIAM J. Control Optim. 17,5 (1979), 567-86.

[12] R.B. VINTER-G. PAPPAS: A maximum principle for nonsmooth optimal control problems with state constraints. J. Math. Anal. Appl. 89 (1982), 212-32.

[13] F.H. CLARKE: Optimal control and the true Hamiltonian. SIAM Review 21, 2(1979), 157-66.